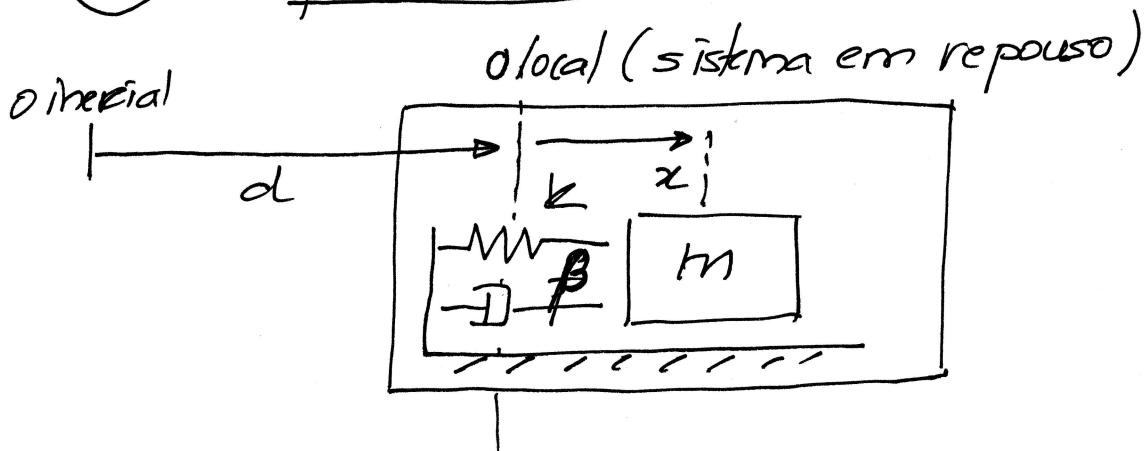


(P2)

Acelerômetro



Aplicar a Lei de Newton para corpos em translacão \rightarrow aplicar à massa m

$$\sum F'_{\text{apl}} = m \frac{d^2}{dt^2} (\underbrace{d + x}_{\text{coordenada global, inercial da posição da massa } m})$$

coordenada global,
inercial da posição da
massa m .

Foras aplicadas à massa:

- (i) devida à mob: $-kx$
- (ii) devida ao amortecedor: $-\beta \frac{dx}{dt}$
- (iii) devida ao atrito na caixa: $-\gamma \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow -kx - \beta \frac{dx}{dt} - \gamma \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} (x+d)$$

notar que $\frac{d^2d(t)}{dt^2} = \underline{\alpha(t)}$
 aceleração da
 caiça!

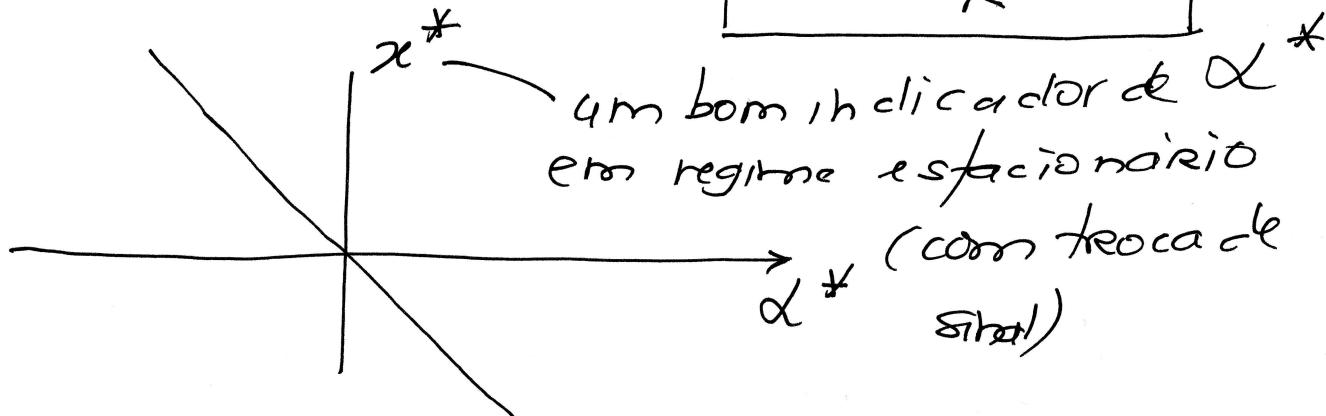
$$\Rightarrow \boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + (\beta + \gamma) \frac{dx}{dt} + kx = -m \alpha}$$

Nota: sistema estavel de 2^o ordem com
 entrada $-\alpha$!

Se $\alpha \rightarrow \alpha^*$ (constante)

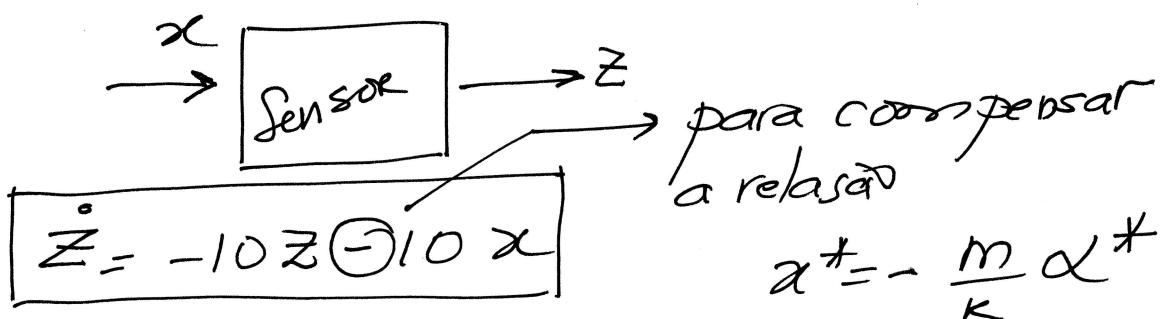
$\Rightarrow x \rightarrow x^*$ (constante) tal que

$$kx^* = -m\alpha^* \Rightarrow \boxed{x^* = -\frac{m}{k}\alpha^*}$$



P2.2

Sensor que lê a variável $x(t)$
(deslocamento da massa):



SISTEMA TOTAL (massa + sensor)

Variáveis adoptadas:

$$x_1 = x; x_2 = \frac{dx}{dt}; x_3 = z$$

(A) $m \frac{d^2x}{dt^2} + (\beta + \gamma) \frac{dx}{dt} + kx = -m\alpha$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x} = x_2 \quad \checkmark$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x} = -\frac{(\beta + \gamma)}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{(\beta + \gamma)}{m} x_2 - \alpha \quad \checkmark$$

(B)

$$z = x_3$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = -10x_3 - 10x_1$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\left(\frac{\beta+\gamma}{m}\right) & 0 \\ -10 & 0 & -10 \end{pmatrix}}_A \right) \vec{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B \alpha \quad \checkmark$$

$$Y = Z = x_3$$

$$\Rightarrow Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C \vec{x} \quad \checkmark$$

P2.3 Valores estacionários

$$x_2 = 0; \quad x_1 = x_1^*; \quad z = z^*; \quad \alpha = \alpha^* \\ (x_3 = x_3^*)$$

- Segunda equação -

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1^* - \left(\frac{\beta+\gamma}{m}\right) x_2^* - \alpha^*$$

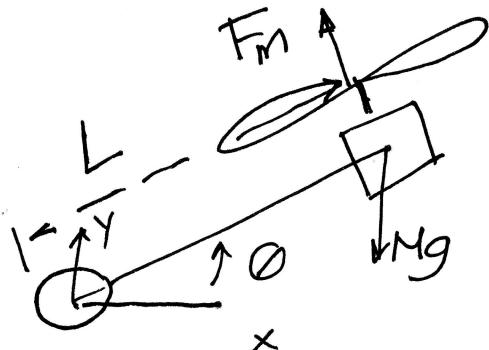
$$\Rightarrow \boxed{x_1^* = -\alpha^* \frac{m}{k}}$$

- Terceira equação: $\Rightarrow x_3^* = -x_1^*$

$$\ddot{x}_3^* = -10 x_1^* - 10 x_3^* = \boxed{\alpha^* \frac{m}{k}} \quad \checkmark$$

RESOLUÇÃO TESTE N.º 1 TIPO - V05

PERGUNTA 2



2.1 Modelarão

$$\sum \text{Trasl} = J \frac{d\theta}{dt^2} \quad (\text{Lei de Newton-Euler para corpos em rotação})$$

→ Forno Inercial

$$-k\dot{\theta} - MgL \cos \theta + LF_m$$

mola
 rotacional Binário,
 devido à
 gravidade

2.2 Descrição em espaço de estados

Atribuição de variáveis

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{J} x_1 - \frac{MgL}{J} \cos x_1 + \frac{F}{J} L$$

u

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

\sqrt{u}

$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 10 \cos x_1 + F'$$

$$(x = f(x, u)) = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{pmatrix}$$

Liberizações em torno de $x_1 = \pi/6, x_2 = 0$

$$\delta \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{eq} \delta x + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}_{eq} \delta u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 + \underbrace{10 \cos \pi/6}_{5} & 0 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B \delta u$$

Cálculo de valores próprios de A

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = +1 \Rightarrow \underbrace{\lambda_{1,2}}_{\lambda_1 = \pm 1}$$

EXISTE!

Função de Transfereência

$$\delta u \rightarrow \delta x_1$$

$$\overset{\circ}{\delta x_1} = \delta x_2$$

$$\overset{\circ}{\delta x_2} = \delta x_1 + \delta u$$

$$; \quad \delta y = \delta x_1$$

(sem $\overset{\circ}{\delta}!$)

$$\overset{\circ}{x_1} = \overset{\circ}{x_2} = x_1 + \bar{U}$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{s x_1}(s) - x_1(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 1} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{x_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 1}$$

P2.4 -

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$u = -2x_1 - x_2$$

(Sist. Linearizado com notação X
em vez de \dot{x}_1 !)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u = x_1 - 2x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

Val. próprios

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda + 1) + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \lambda + 1} = 0$$

ESTRANHO!

P2.5 -

$$U = R - 2x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + R - 2x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -x_1 - x_2 + R$$

$$\Rightarrow s^2 X_1(s) + s X_1(s) + X_1(s) = R(s)$$

$$\Rightarrow \frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

✓ polos = valores próprios